Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio, 2008
Duración: 1 hora, 50 minutos.

Carnet: ____________________

Nombre: ____________________

Sección: ____________________

MA-1112 —Primer Parcial, Martes 20-05-2008. (30 %) —

Justifique todas sus respuestas. Examen Tipo 81R

1. (12 ptos.) Calcule

a) (4 ptos.)

$$\int_{-1}^{2} \left(2[x] + x^2\right) dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{-1}^{2} \left(2[x] + x^2\right) dx &= \textstyle\int_{-1}^{2} 2[x]dx + \int_{-1}^{2} x^2 dx \\
&= \textstyle\int_{-1}^{0} 2[x]dx + \int_{0}^{1} 2[x]dx + \int_{1}^{2}\ 2[x]dx + \int_{-1}^{2} x^2 dx \\
&= 2\textstyle\int_{-1}^{0} -1dx + 2\int_{0}^{1} 0dx + 2\int_{1}^{2}\ 1dx + \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\
&= 2\left[-x\right]_{-1}^{0} + 0 + 2\left[x\right]_{1}^{2} + \left[\dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3}\right] \\
&= -2 + 2 + 3 = 3.
\end{aligned}$$

b) (4 ptos.)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)} dx$$

Solución:
Realizando el cambio de variable $u = \operatorname{sen}(x)$, $du = \cos(x)dx$ y sus limites de integracion seran: $u = 0$, cuando $x = 0$ y $u = 1$, cuando $x = \pi/2$. Asi,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)} dx &= \textstyle\int_{0}^{1} \dfrac{u^2 du}{1+u^2} \\
&= \textstyle\int_{0}^{1} \dfrac{(u^2+1-1)du}{1+u^2} = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(u^2+1)du}{1+u^2} - \int_{0}^{1} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \left[u - \arctan(u)\right]_{0}^{1} = 1 - \arctan(1) = 1 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

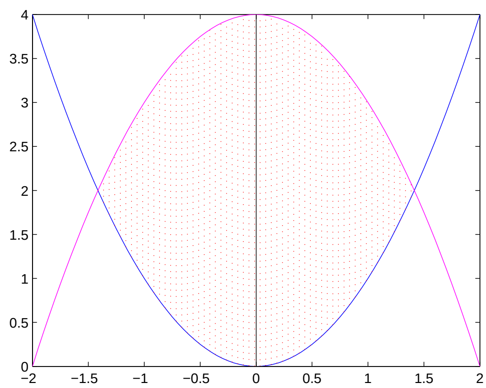
c) (4 ptos.)

$$\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}dx$$

Solución:
Realizando el cambio de variable $u = 1+x^2$, $du = 2xdx$ y $x^2 = u-1$. Es decir, podemos reescribir a $x^3dx = (u-1)du/2$. Asi,

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt[3]{1+x^2}dx &= \frac{1}{2}\int (u-1)\sqrt[3]{u}du = \frac{1}{2}\left(\int u^{4/3}du - \int u^{1/3}du\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{7/3}}{7/3} - \frac{u^{4/3}}{4/3}\right) + C \\ &= \frac{3}{14}(1+x^2)^{7/3} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{4/3} + C. \end{aligned}$$

2. (6 ptos.) Determine el área de la región limitada por la parabola $y = x^2$ y la parabola $y = 4 - x^2$.
Solución:



Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$, obtenemos $x_1 = -\sqrt{2}$ y $x_2 = \sqrt{2}$.

Utilizando rebanadas verticales, el área de la región que se muestra en la figura anterior esta dado por

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[\left(4-x^2\right) - x^2\right] dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(4-2x^2\right) dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(4-2x^2\right) dx \text{ (por simetría)}$$

$$= 2\left[4x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

3. (6 ptos.) Dada $f(x) = 2 + (x-1)^2$ en $[-1, 4]$, calcule la suma de Riemann empleando la particion $P = \{-1, 0, 2, 4\}$ y tomando como $\overline{x_i}$, al punto de $[x_{i-1}, x_i]$ donde f alcanza el

máximo ($i = 1, 2, 3$).

Solución:

La función $f(x) = 2+(x-1)^2$ es una parabola concava hacia arriba cuyo vertice se encuentra en el pto $(1, 2)$. Luego,

$\overline{x_i} = \begin{cases} x_{i-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ x_{i-1} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ (Observación: en el 2do subintervalo $f(0) = f(2) = 3$).

Asi,

i	$\overline{x_i}$	$f(\overline{x_i})$	Δx_i
1	-1	$2 + (-1-1)^2 = 6$	1
2	2	$2 + (2-1)^2 = 3$	2
3	4	$2 + (4-1)^2 = 11$	2

Luego,

$$R_p = \sum_{i=1}^{3} f(\overline{x_i})\Delta x_i = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 11 \cdot 2 = 6 + 6 + 22 = 34.$$

4. (6 ptos.) Sea f una función continua y suponga que:

$$x \cos(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t)dt.$$

Halle $f(9)$.

Sugerencia: Derive ambos lados de la igualdad.

Solución:

Derivando ambos lados de la igualdad, obtenemos que

$$\cos(\pi x) - \pi x \operatorname{sen}(\pi x) = f(x^2) \cdot 2x.$$

Claramente, $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Evaluando $x = 3$, tenemos que

$$\cos(3\pi) - 3\pi \operatorname{sen}(3\pi) = 6f(9) \Rightarrow -1 - 3\pi \cdot 0 = 6f(9).$$

Entonces,

$$f(9) = -\frac{1}{6}.$$